מזעור זמני המתנה למעליות

עידו גרינברג

אפריל 2014

שאלת מחקר ראשונית

כשאף אחד לא משתמש במעלית, איפה הכי כדאי לה לחכות, כדי למזער את ההמתנה הצפויה של הנוסע הבא?

קווים מנחים לבניית המודל

- קלט: "קומת המנוחה" של המעלית
- פלט: תוחלת זמן ההמתנה של הנוסע הבא

הנחות

- **הפרדת משימות (דלילות נוסעים): נוסעים לא משתמשים במעלית במקביל – הנוסע הבא מגיע אחרי שהקודם כבר סיים!**
- כל הנסיעות הן מ-/ל- קומת הקרקע (ולא בין קומות שרירותיות)
- עלות הפעלת המעלית זניחה
- בסיום כל משימה, המעלית חוזרת לקומת המנוחה a

- N>>1 קומות (עוזר להפוך סכום לאינטגרל...)
- הומוגניות בקומות (אין שימוש במדרגות, תדירות השימוש זהה בכל קומה)
- הומוגניות בזמן (אין שעות שבהן יש נטייה מועדפת לעלות/לרדת)
- מהירות המעלית קבועה v, עם זמן זניח להאצה ולפתיחת דלתות

אנליזה מימדית

[T] = T [N] = L [a] = L [v] = LT^{-1}

$$\tau \coloneqq \frac{v}{N} E(T) \qquad \alpha \coloneqq \frac{a}{N}$$

בעיה חד מימדית – זמן מנורמל כפונקציה של קומת המנוחה המנורמלת:

$$\tau = \Phi(\alpha)$$

מודל בסיסי

- <u>למה</u>: לכל קומה x, הסיכוי שהנוסע הבא ירצה להגיע מקומה 0 לקומה x, שווה לסיכוי שירצה להגיע מקומה x לקומה 0, והוא 1/(2N).
- <u>הוכחה</u>: לפי הומוגניות בקומות והומוגניות בזמן.
- מכאן:

$$E(T) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2}\frac{length_{a\to 0\to x}}{v} + \frac{1}{2}\frac{length_{a\to x\to 0}}{v}\right] =$$

$$\frac{1}{2Nv}\sum_{x=1}^{N}(|a| + |x|) + (|a-x| + |x|)$$

- יש נסיעה באורך x, בלי תלות ב-a או בכיוון הנסיעה
- יש נסיעה נוספת באורך a לעולים, או באורך |a-x| ליורדים

מודל בסיסי

$$\tau = \frac{1}{2N^2}\int_0^N a + 2x + |a - x|\, dx =$$

$$\frac{1}{2N^2}\int_0^a 2a + x\, dx + \int_a^N 3x\, dx =$$

$$\frac{1}{2N^2}(2a^2 + 0.5a^2 + 1.5N^2 - 1.5a^2) = \frac{3}{4} + \frac{a^2}{2N^2}$$

- קומה אופטימלית למנוחה – 0!

שתי מעליות

$$\tau = \frac{1}{2N^2}\left[\int_0^{\frac{a+b}{2}} length_{a\to 0\to x} + length_{a\to x\to 0}\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{N} length_{a\to 0\to x} + length_{b\to x\to 0}\, dx\right] =$$

$$\frac{1}{2N^2}\left[\int_0^{\frac{a+b}{2}} a + x + |a - x| + x\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{N} a + x + |b - x| + x\, dx\right] =$$

$$= \cdots = \frac{3}{4} + \frac{a-b}{2N} + \frac{3a^2 - 2ab + 3b^2}{8N^2}$$

שתי מעליות

- אז מהן קומות המנוחה האופטימליות?
- השוואת גרדיאנט ל-0: $a = -N/2,\ b = N/2$
  - מחוץ לתחום ההגדרה $0 \le a \le b \le N$
  - ← הפיתרון על השפה $a=0$ או $b=a$
  - אם $b=a$ אז הבעיה שקולה למעלית אחת ← $b=a=0$
  - ← כך או כך $a=0$
  - ← ניתן להציב $a=0$ ולעשות אופטימיזציה על b
  - גזירה והשוואה ל-0:

$$a = 0$$
$$b = \frac{2}{3}N$$

K מעליות הומוגניות

- K מעליות בעלות מהירות שווה v
- קומות מנוחה $a_1 <= a_2 <= \ldots <= a_K$
- כאשר נוסע מגיע, ניגשת אליו המעלית הקרובה ביותר

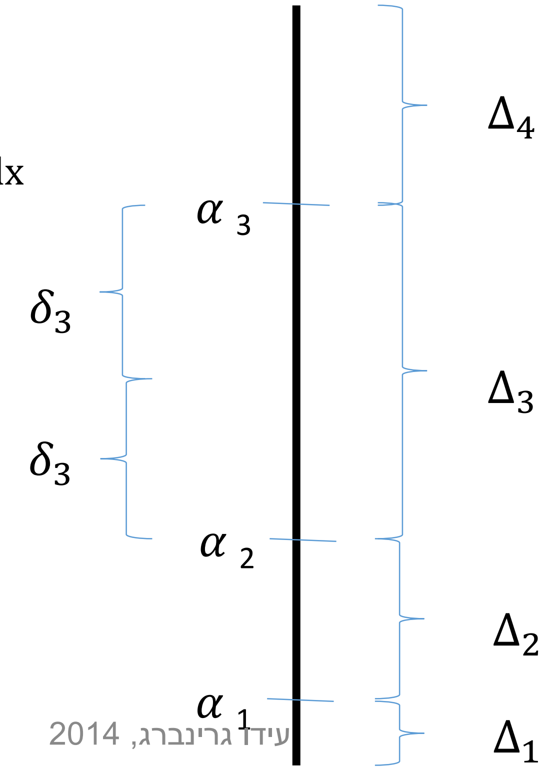
$$\tau = \frac{1}{2N^2}\left[\int_0^{\frac{a_1+a_2}{2}} length_{a_1\to 0\to x} + length_{a_1\to x\to 0}dx + \sum_{i=2}^{K-1}\int_{\frac{a_{i-1}+a_i}{2}}^{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}} length_{a_1\to 0\to x} + length_{a_i\to x\to 0}dx + \int_{\frac{a_{K-1}+a_K}{2}}^{N} length_{a_1\to 0\to x} + length_{a_K\to x\to 0}dx\right]$$

K מעליות הומוגניות

- בבעיות הקודמות:
  - חישוב תוחלת זמן ההמתנה
  - אופטימיזציה ביחס לקומות המנוחה
- חישוב תוחלת ההמתנה
  - ביטוי לא סגור

    ← מעבר קואורדינטות

$$
\begin{aligned}
2\tau &= \int_0^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \alpha_1 + x + |\alpha_1 - x| + x\,dx + \sum_{i=2}^{K-1} \int_{\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}}^{\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}} \alpha_1 + x + |\alpha_i - x| + x\,dx \\
&+ \int_{\frac{\alpha_{K-1}+\alpha_K}{2}}^{1} \alpha_1 + x + |\alpha_K - x| + x\,dx \\
&= \int_0^1 \alpha_1 + 2x\,dx + \int_0^{\alpha_1} \alpha_1 - x\,dx + \int_{\alpha_1}^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} x - \alpha_1\,dx \\
&+ \sum_{i=2}^{K-1}\left[\int_{\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}}^{\alpha_i} \alpha_i - x\,dx + \int_{\alpha_i}^{\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}} x - \alpha_i\,dx\right] + \int_{\frac{\alpha_{K-1}+\alpha_K}{2}}^{\alpha_K} \alpha_K - x\,dx \\
&+ \int_{\alpha_K}^{1} x - \alpha_K\,dx
\end{aligned}
$$



K מעליות הומוגניות

$$2\tau = [\alpha_1 x + x^2]_0^1 + \int_0^{\delta_1} ydy + \int_0^{\delta_2} ydy + \sum_{i=2}^{K-1}\left[\int_0^{\delta_i} ydy + \int_0^{\delta_{i+1}} ydy\right] + \int_0^{\delta_K} ydy + \int_0^{\delta_{K+1}} ydy = \alpha_1 + 1 + \frac{\delta_1^2}{2} + \sum_{i=2}^{K} \delta_i^2 + \frac{\delta_{K+1}^2}{2}$$

$$\boxed{= 1 + \Delta_1 + \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_{K+1}^2) + \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{K} \Delta_i^2}$$

K מעליות הומוגניות

- בבעיות הקודמות:
  - חישוב תוחלת זמן ההמתנה
  - אופטימיזציה ביחס לקומות המנוחה
- חישוב תוחלת ההמתנה V
- אופטימיזציה
  - כופלי לגרנז' עם האילוץ $\sum_{i=1}^{K+1} \Delta_i = 1$

K מעליות הומוגניות

- כופלי לגרנז':
  - האילוץ $\sum_{i=1}^{K+1} \Delta_i = 1$

$$L = 1 + \Delta_1 + \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_{K+1}^2) + \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{K} \Delta_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{K+1} \Delta_i - 1\right)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \Delta_1} = 1 + \Delta_1 + \lambda$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \Delta_i} = \frac{1}{2}\Delta_i + \lambda \quad (2 \le i \le K)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \Delta_{K+1}} = \Delta_{K+1} + \lambda$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{K+1} \Delta_i - 1$$

- הפיתרון נותן ערכים שליליים ☹

K מעליות הומוגניות

- אבחנה: אם קובעים Δ_1=0, אז כל השאר יוצאים חיוביים
  - אבל זו קביעה שרירותית ולא מוצדקת. מה כן אפשר לעשות?
- נתייחס תחילה ל-Δ_1 כפרמטר (נזרוק את המשוואה $\frac{\partial L}{\partial \Delta_1}=0$), ונפתור עבור השאר.
- פיתרון:

$$\Delta_{K+1} = -\lambda =: \delta$$
$$\Delta_i = -2\lambda = 2\delta \quad (2 \le i \le K)$$

- מהאילוץ מתקבל הנרמול של δ:

$$1 = \sum_{i=1}^{K+1} \Delta_i = \Delta_1 + (2K-1)\delta$$

K מעליות הומוגניות

- ביטאנו את הכל באמצעות Δ_1 ← מתקבלת בעיה חד מימדית:

$$2\tau = \cdots = \frac{2K\Delta_1^2 + 4(K-1)\Delta_1 + 4K - 1}{2(2K-1)}$$

- המינימום הוא כמובן ב-0 $\Delta_1 =$, וזמן ההמתנה יוצא:

$$E(T) = \frac{N}{2v}2\tau = \frac{1}{2}\frac{N}{v}\frac{4K-1}{4K-2}$$

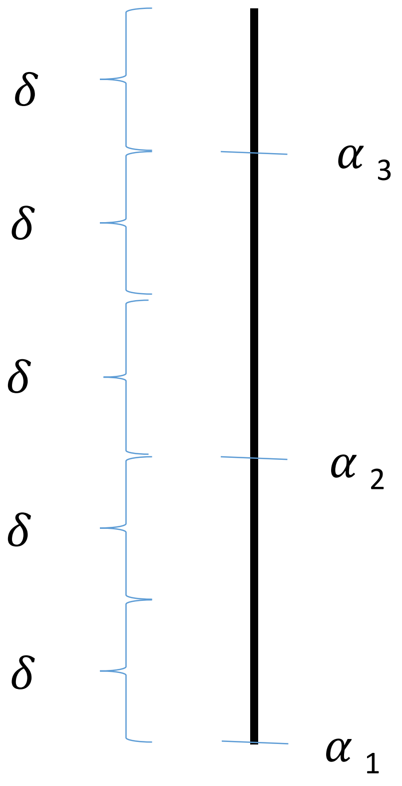
- המקרה K=1 עקבי עם המודל המקורי: $E(T) = \frac{3}{4}\frac{N}{v}$

K מעליות הומוגניות

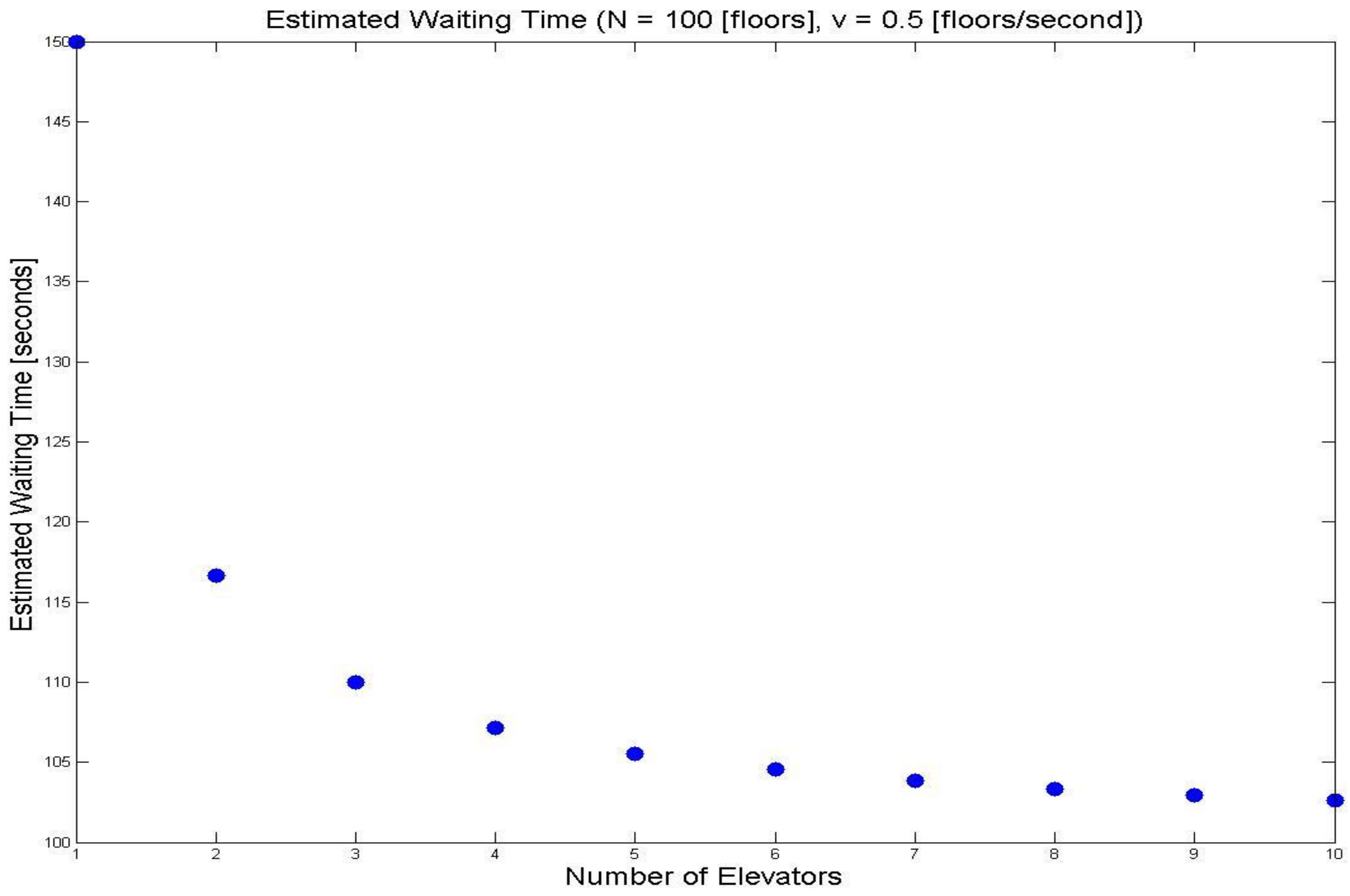
- בבעיות הקודמות:
  - חישוב תוחלת זמן ההמתנה
  - אופטימיזציה ביחס לקומות המנוחה
- חישוב תוחלת ההמתנה V
- אופטימיזציה V

K מעליות הומוגניות – ניתוח משמעויות

- מעלית ראשונה בקומת הקרקע
- כל שאר המעליות מכסות באופן "אחיד" את הבניין
  - מזעור המרחק המירבי למעלית הקרובה $\max\{\delta_i\}$



דוגמה


Estimated Waiting Time (N = 100 [floors], v = 0.5 [floors/second])
Estimated Waiting Time [seconds]
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Number of Elevators

K מעליות הטרוגניות

$$E(T) = \frac{1}{2N}\left[\int_{0}^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \frac{\alpha_1 + x + |\alpha_1 - x| + x}{v_1} dx + \sum_{i=2}^{K-1} \int_{\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}}^{\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}} \frac{\alpha_1 + x}{v_1} + \frac{|\alpha_i - x| + x}{v_i} dx + \int_{\frac{\alpha_{K-1}+\alpha_K}{2}}^{1} \frac{\alpha_1 + x}{v_1} + \frac{|\alpha_K - x| + x}{v_K} dx\right]$$

K מעליות הטרוגניות

- מסובך
- אי אפשר לקבץ איברים

- תחת הנחות סבירות
  - גזירות
  - סימטריה (שמגיעה מרוטציה בקומות לאורך זמן)

אפשר להשתמש בעיקרון המיצוע

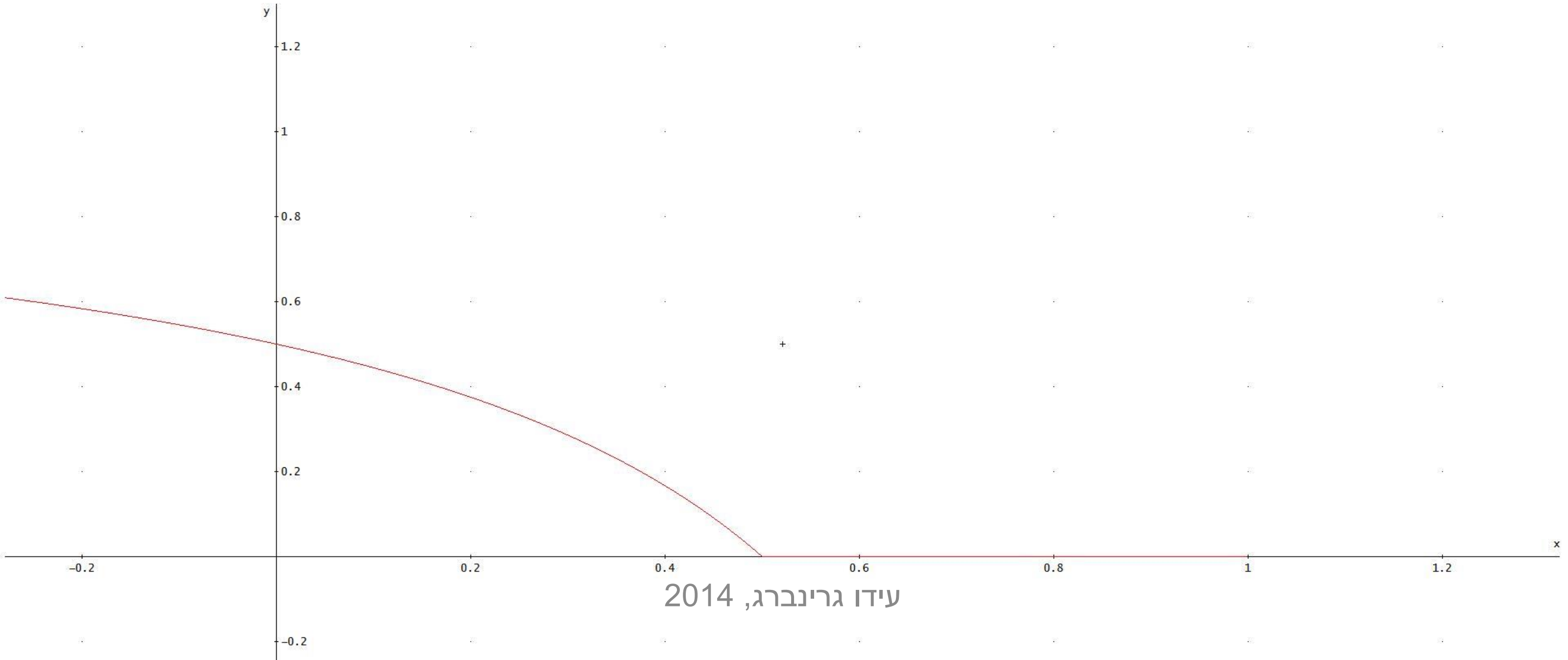
הטרוגניות בקומות

- מס' הדיירים או מידת השימוש במעלית הטרוגניים
- לקומות שונות יש משקלים שונים בחישוב ממוצע זמן ההמתנה
- קשה לחשב
- אין סימטריה ← אין עיקרון המיצוע

☹

הטרוגניות בזמן

- לפעמים שיעור העולים גדול משיעור היורדים, ולפעמים להיפך
- אין סימטריה ← אין עיקרון המיצוע
- במעלית אחת, אפשר לחשב ישירות את הקומה האופטימלית a כפונקציה של שיעור העולים p:



עלות הפעלה לא זניחה

- המעלית סיימה משימה בקומה a_0. לאיזו קומה a הכי כדאי לחזור לקראת המשימה הבאה?
  - במודל המקורי (ללא עלות נסיעה) – a = 0.
- $c\ [\frac{\$}{floors}]$ =: עלות הפעלת המעלית
  - נבחר שרירותית פר קומה, ולא למשל פר האצה
- $\gamma\ \left[\frac{\$}{T}\right]$ =: עלות ההמתנה של נוסע
- עלות הנסיעה+המתנה הצפויה מחזרה ל-a:

$R(a_0, a, N, v, c, \gamma)$

עלות הפעלה לא זניחה

- אנליזה מימדית:

$$\alpha := \frac{a}{N}\ , \qquad \alpha_0 := \frac{a_0}{N}\ , \qquad \pi := \frac{c}{\gamma/v} = \frac{using\ cost}{waiting\ cost}$$

$$r := \frac{R}{cN}$$

$$R = cN\Phi(\alpha, \alpha_0, \pi)$$

- חישוב מפורש:

$$\boldsymbol{R} = \gamma\frac{N}{v}\left[\frac{3}{4} + \frac{a^2}{2N^2}\right] + c|a_0 - a| = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{2Nv}}\boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{ca} + const$$

עלות הפעלה

$(a_0>a)$

- מינימום עלות:

$$a = \begin{cases} \frac{Nvc}{\gamma}, & \frac{Nvc}{\gamma} < a_0 \\ a_0, & else \end{cases}$$

עלות המתנה

משימות מקבילות – נקודות למחשבה

- מהי התפלגות קצב הגעת הנוסעים?
- איך מגיבות המעליות להגעת נוסעים נוספים במהלך משימה?
  - כדי להימנע מתוצאות מנוונות, צריך להיזהר ממודל שמוותר על דרגות חופש
  - מצד שני, כדי לקבל בעיית אופטימיזציה, צריך לנסח את דרגות החופש כפרמטרים

סיכום

- מודל בסיסי + אנליזה מימדית V
- K מעליות הומוגניות V
- K מעליות הטרוגניות ~
- הטרוגניות בקומות X
- הטרוגניות בזמן V
- עלות הפעלה פר קומה V
- משימות מקבילות X

סיכום

• מודל בסיסי + אנליזה מימדית	V	אדיש להנחת הדלילות
• K מעליות הומוגניות	V	
• K מעליות הטרוגניות	~	
• הטרוגניות בקומות	X	
• הטרוגניות בזמן	V	אדיש להנחת הדלילות
• עלות הפעלה פר קומה	V	אדיש להנחת הדלילות
• משימות מקבילות	X	

שאלות?